4-практикалық сабақ

3. Тригонометриялық функцияларды интегралдау

Бұл бөлімде біз

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

түріндегі интегралды табу әдістерін қарастырамыз, мұндағы $R(u,v)$- u, v- ға қатысты рационал функция.

Мұндай түрдегі интегралдар **айнымалыны универсал ауыстыру көмегімен**

$$tg\frac{x}{2} = t,$$

рационал функцияларды интегралдауға әкелеміз. Шынында да,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \left| \text{ бөлшектің алымы мен бөлімін } \cos^2\frac{x}{2} \text{-қа бөлеміз } \right| =$$

$$= \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$x = 2arctgt$ болғандықтан, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Нәтижесінде:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$$

мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

Мысал 4.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| tg\frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + c = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

1^0. Егер интеграл астындағы функция косинус бойынша тақ болса, яғни, $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ болса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x)\cdot \cos x,$$

одан кейін интегралда $\sin x = t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(\sin x)\cos xdx = |\sin x = t| = \int R_1(t)dt.$$

Мысал 5.

$$\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x\cdot coxdx = \int (1-\sin^2 x)\cos xdx = \int (1-\sin^2 x)d\sin x =$$

$$= |\sin x = t| = \int (1-t^2)dx = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

2^0. Егер интеграл астындағы функция синус бойынша тақ болса, яғни,

$$R(-\sin x, \cos t) \equiv -R(\sin x, \cos x) \text{ болса,}$$

онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\cos x)\sin x,$$

одан кейін интегралда $\cos x = t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(\cos x)\sin x dx = |\cos x = t| = -\int R_1(t)dt.$$

3^0. Егер интеграл астындағы функция

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

теңдігін қанағаттандырса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(tgx),$$

одан кейін интегралда айнымалыны ауыстырсақ:

$$tgx = t,\ x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

Онда рационал функцияның интегралына әкеледі.

Мысал 6.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx = \int tg^3 x dx = \left| tgx = t, dx = \frac{1}{1+t^2}dt \right| = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int \frac{t^2 t}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2}dt^2 = |t^2 = z| = \frac{1}{2}\int \frac{(z+1)-1}{z+1}dz = \frac{1}{2}\left(\int dz - \int \frac{dz}{z+1}\right) = \frac{1}{2}(z - ln|z+1|) + C =$$

$$= |z = t^2 = tg^2 x| = \frac{1}{2}(tg^2 x - ln(tg^2 x + 1)) + C.$$

4^0. Мына түрдегі интегралдар:

$\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, мұндағы m, n – тұрақты сандар, берілсе, онда интеграл астындағы функция мына формулалардың көмегімен синус пен косинустардың қосындысына келеді:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Мысал 7.

$$\int \sin 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$$

5^0. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ түріндегі интеграл, мұндағы m және n – кез келген бүтін көрсеткіштер.

1). Егер тым болмағанда m немесе n көрсеткіштерінің біреуі тақ бүтін оң сан болса, мысалы $n = 2k+1$, онда $\sin$ x = t деп белгілейміз:

$$\int \sin^m x \bullet \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k d\sin x = \int t^m (1-t^2)^k dt$$

Мысал 8.

$$\int sin^2 x\,cos^3 x dx = \int sin^2 x(1-sin^2 x)d\,sin\,x = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C$$

$$=\frac{1}{3}sin^3 x - \frac{1}{5}sin^5 x + C.$$

2) Егер m және n көрсеткіштерінің екеуі де жұп, оң, бүтін сан болса, онда мына формулаларды қолданған жөн:

$$sin^2 x = \frac{1-cos\,2x}{2}, cos^2 x = \frac{1+cos\,2x}{2}.$$

Мысал 9.

$$\int sin^2 x \cdot cos^2 x dx = \int \frac{(1-cos\,2x)(1+cos\,2x)}{4}dx = \int \frac{(1-cos^2 2x)}{4}dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1+cos\,4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos\,4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}sin\,4x\right)+C.$$

III. Берілген анықталмаған интегралдарды табу керек:

1. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. $\left(Жауабы: \frac{1}{4}ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+C\right)$.
2. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$. $\left(Жауабы: \frac{1}{\sqrt{15}}arctg\frac{\sqrt{3}\,tg\,x}{\sqrt{5}}+C\right)$.
3. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. $\left(Жауабы: ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C\right)$.
4. $\int \cos^3 x \sin^{10} x\, dx$ $\left(Жауабы: \frac{sin^{11} x}{11}-\frac{sin^{13} x}{13}+C\right)$.
5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x}$. $\left(Жауабы: \frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}+3-\sqrt{5}}{2tg\frac{x}{2}+3+\sqrt{5}}\right|+C\right)$.
6. $\int \sin^4 x\, dx$. $\left(Жауабы: \frac{3x}{8}-\frac{sin\,6x}{12}+\frac{sin\,12x}{96}+C\right)$.
7. $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$. $\left(Жауабы: \frac{1}{4}ln\left|\frac{1+tgx}{1-tgx}\right|+\frac{1}{2}sin\,x\,cos\,x+C\right)$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$. $\left(Жауабы: ln|\,tgx\,|-\frac{1}{2\,sin^2 x}+C\right)$.

Қолданылған оқулықтар:

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика I. ШҚМТУ, 2008
2. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2011г.
4. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1,2,3 бөлім Бастау, 2008
5 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2011г.